

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Priliminaires</b>	<b>2</b>
1.1 Motivation . . . . .	2
1.1.1 Résolution analytique . . . . .	3
1.1.2 Intégration d'ordre un-demi . . . . .	4
1.2 Historique . . . . .	7
1.3 Fonctions spéciales . . . . .	11
1.3.1 La fonction Gamma . . . . .	11
1.3.2 La fonction Bêta . . . . .	15
1.3.3 La fonction Mittag-Leffler . . . . .	16
1.3.4 La fonction de Wright . . . . .	17
<b>2 Quelques approches de calcul fractionnaire</b>	<b>18</b>
2.1 Intégrale fractionnaires de Riemann-Liouville . . . . .	18
2.2 Dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville . . . . .	23
2.3 Approche de Grünwald-Letnikov . . . . .	27
2.4 Approche de Caputo . . . . .	28
2.5 Approche de Hadamard . . . . .	30
2.6 Approche de Weyl . . . . .	31
<b>3 Quelques applications</b>	<b>32</b>
3.1 Exemple des équations différentielles d'ordre fractionnaire . . . . .	32
3.1.1 Réduction du problème de type Cauchy et du Volterra équation intégrale	32
3.1.2 Existence et unicité de la solution du problème de type Cauchy . . .	34
3.1.3 Méthode de Laplace . . . . .	36
3.1.4 Méthode des séries . . . . .	38
3.1.5 Méthode opérationnelle . . . . .	40
3.2 Problèmes de type Cauchy pour une équation en deux dimensions . . . . .	41
<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique, puisque il a été initié par Leibniz et Newton à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle, ensuite, plusieurs mathématiciens ont contribué à son développement. Récemment, il y a de plusieurs travaux et approches concernés à ce large domaine.

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans plusieurs domaines scientifiques différents comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc.

Notre mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on a consacré à rappeler des outils dont nous avons besoin dans ce sujet,

Dans le deuxième chapitre, on présente la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et quelques propriétés. On donne aussi quelques approches (approche de Caputo, Granwald-Litnikov, Hadamard et Weyl).

Dans le troisième chapitre on présente quelques exemples et applications aux équations différentielles (existence et unicité de la solution de problème de type Cauchy, et la solution par des méthodes différent), et équations aux dérivées partielles (problèmes de type Cauchy pour une équation en deux dimensions par l'utilisation de transformé de Laplace et de Fourier).

# Chapitre 1

## Priliminaires

### 1.1 Motivation

Dans ce premier paragraphe, on consacre à justifier l'existence d'une dérivée fractionnelle, pour cela, nous montrons que la dérivée d'ordre un-demi s'introduit naturellement quand on cherche à calculer un flux de chaleur à l'aide de la transformée de Fourier (voir [6]).

On cherche une fonction  $u(x, t)$ , solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t), \quad t > 0, \quad x \geq 0. \quad (1.1)$$

La fonction inconnue  $u(x, t)$ , satisfait à une contrainte de nullité en  $x = 0$ , et que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  tend vers 0 si  $x$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi on a :

$$u(0, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{si } x \rightarrow +\infty. \quad (1.3)$$

$\Phi(t)$  donné par la loi de Fourier :

$$\Phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \quad t > 0. \quad (1.4)$$

### 1.1.1 Résolution analytique

Nous utilisons la transformée de Fourier en  $t$ , pour résoudre le problème (1.1) – (1.3). Nous introduisons la transformée de Fourier  $\hat{u}(x, \omega)$  de la fonction  $u$  :

$$\hat{u}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt.$$

Utilisant la transformée de Fourier inverse, on arrive à :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.5)$$

On dérive par rapport à  $t$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \hat{u}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Alors :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = i\omega \hat{u}. \quad (1.6)$$

On note  $\hat{f}$ , la transformée de Fourier du second membre  $f$ . Alors l'équation (1.1) s'écrit comme suivant :

$$i\omega \hat{u} - \mu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \hat{f}. \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2, obtient une solution :

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f} + \alpha \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} x\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} x\right).$$

Tenant en compte la condition limite (1.3) en  $+\infty$ , qui impose de ne pas permettre l'existence d'une solution exponentiellement croissante en  $x$  ; donc on a nécessairement  $\alpha = 0$ . D'après la condition limite (1.2) en  $x = 0$ , on à :

$$\beta = -\frac{1}{i\omega} \hat{f}, \quad (1.8)$$

donc :

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f} \left[ 1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} x\right) \right]. \quad (1.9)$$

Dérivant par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{i\mu\omega}} \widehat{f} \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} x\right),$$

puis faire  $x = 0$  :

$$-\mu \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x}(0, \omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}} \widehat{f} = \widehat{\Phi}(\omega). \quad (1.10)$$

Comme la transformée de Fourier de la fonction dérivée de  $f$  est obtenue en multipliant  $\widehat{f}$  par  $i\omega$ , la quantité  $\sqrt{\frac{1}{i\omega}} \widehat{f}(\omega)$  semble pouvoir s'interpréter comme la transformée de Fourier d'une intégrale d'ordre un-demi de la fonction  $f$ . De façon plus précise, si nous posons

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} H(t), \quad (1.11)$$

avec  $H(t)$  fonction de Heaviside définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}, \quad (1.12)$$

nous avons voir l'Annexe dans [6] :

$$\widehat{\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}. \quad (1.13)$$

### 1.1.2 Intégration d'ordre un-demi

Nous pouvons reprendre la suite de la résolution analytique du problème (1.1) – (1.3) et préciser l'expression (1.10) sous la forme :

$$\widehat{\Phi}(\omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}} \widehat{\rho} \widehat{f}. \quad (1.14)$$

Soit la convolution  $(\rho * f)$  des fonctions  $\rho$  et  $f$ , définie par :

$$(\rho * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y) f(x-y) dy,$$

on a la relation classique :

$$\widehat{\rho * f} = \widehat{\rho} \widehat{f}. \quad (1.15)$$

Ainsi :

$$\widehat{\phi}(t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \rho * f = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}. \quad (1.16)$$

Nous venons de faire apparaître l'intégration d'ordre un demi de la fonction  $f$ .

on arrive à la définition suivant de l'intégrateur d'ordre un-demi d'une fonction causale.

**Définition 1.1** Une fonction **causale**, est une fonction vérifie :

$$u(t) = 0 \quad \text{si } t < 0. \quad (1.17)$$

**Définition 1.2** On appelle intégrateur d'ordre un-demi d'une fonction causale et on note  $\left(I^{\frac{1}{2}}u\right)(t)$ , est définie par :

$$\left(I^{\frac{1}{2}}u\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \quad \text{si } t > 0.$$

**Remarque 1.1** le carré de l'intégrateur d'ordre un-demi est l'intégration usuelle d'une fonction causale.

Notée  $\left(I^1u\right)(t)$ , est une fonction causale définie pour  $t > 0$  par :

$$\left(I^1u\right)(t) = \int_0^t u(\theta) d\theta. \quad (1.18)$$

On a alors

$$\left[I^{\frac{1}{2}}\left(I^{\frac{1}{2}}u\right)\right](t) = \int_0^t u(\theta) d\theta, \quad (1.19)$$

ce qui s'écrit aussi en termes d'opérateurs sous la forme :

$$I^{\frac{1}{2}} \circ I^{\frac{1}{2}} = I^1, \quad (1.20)$$

où le symbole  $\circ$  désigne la composée de l'opérateur  $I^{\frac{1}{2}}$  par lui-même :

$$\left(I^{\frac{1}{2}} \circ I^{\frac{1}{2}}\right)(t) = I^{\frac{1}{2}}\left(I^{\frac{1}{2}}(t)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En effet :

$$\left[ I^{\frac{1}{2}} \left( I^{\frac{1}{2}} u \right) \right] (t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \int_0^\theta u(\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\theta-\varphi}}$$

on calcule cette intégrale en utilisant le théorème de Fubini :

$$\left[ I^{\frac{1}{2}} \left( I^{\frac{1}{2}} u \right) \right] (t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\varphi u(\varphi) \int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}\sqrt{\theta-\varphi}}.$$

Pour calculer l'intégrale en  $\theta$ , on effectue le changement de variable  $\theta = \varphi + x(t - \varphi)$  ( $0 < x < 1$ ). Alor :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}\sqrt{\theta-\varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

et

$$\int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}\sqrt{\theta-\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Posons  $y = \sqrt{x(1-x)} = \lambda x$ . Alors  $\lambda = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ , cest à dire  $\lambda^2 = \frac{1}{x} - 1$ . Donc :  $2\lambda d\lambda = -\frac{dx}{x^2}$ , alors :  $dx = -2\lambda x^2 d\lambda$ . On arrive a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{y} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda x} (2\lambda x^2) d\lambda \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Nous retenons que :

$$\int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}\sqrt{\theta-\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi,$$

et la relation (1.19) est maintenant complètement établie.

## 1.2 Historique

Nous allons fournir un aperçu historique uniquement de la période de 1695 à 1974 [6][2][1].

En 1695, L'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz (1646–1716) a présenté le symbole  $\frac{d^n f}{dt^n}$  pour désigner la  $n^{\text{ème}}$  dérivée d'une fonction  $f$ . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que  $n \in \mathbb{N}$ ), l'Hôpital a répondu : Que signifie  $\frac{d^n f}{dt^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$  ?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695.

En 1730, Euler est le deuxième grand mathématicien à aborder la question. Il a présenté sa célèbre fonction Gamma  $\Gamma$  qui est définie par la suite en (1.29) et qui généralise la factorielle ( $\Gamma(n+1) = n!$ ), il a achevé sur une définition pour la dérivée d'ordre  $\alpha > 0$  de  $x^\beta$ , avec  $\beta > 0$  : pour  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m \geq n$ , on a :

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}. \quad (1.21)$$

Grâce à sa fonction Gamma, cette formule s'étend directement à une puissance  $m > 0$  :

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

Par conséquent, une définition pour la dérivée d'ordre réel  $\alpha > 0$  de la puissance réelle  $\beta > 0$  est donnée par :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \quad (1.22)$$

En 1822, Fourier obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel grâce à sa célèbre transformée. Il compose sa transformée (réelle) d'une fonction  $f$  avec sa transformée inverse.

Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(\theta) \cos(p(x-\theta)) d\theta dp. \quad (1.23)$$

Après, il remarque que la dérivée  $n^{\text{ème}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) du cos peut s'écrire comme suit :

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(p(x-\theta)) = p^n \cos\left[p(x-\theta) + \frac{n\pi}{2}\right]. \quad (1.24)$$

L'équation (1.24) a un sens si on remplace  $n$  par  $\alpha > 0$ , ce qui permet de définir la dérivée



d'ordre  $\alpha$  de  $\cos(p(x - \theta))$ , et ainsi la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$ .

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(\theta) p^\alpha \cos\left[p(x - \theta) + \frac{n\pi}{2}\right] d\theta dp.$$

En 1823, Abel résout le problème du tautochrone généralisé, en utilisant le calcul fractionnaire, d'où :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{g(u)}{(x-u)^{1-\alpha}} du = f(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

avec la solution :

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(u)}{(x-u)^\alpha} dx.$$

**Remarque 1.2** Abel n'a jamais résolu le problème par calcul fractionnaire mais a montré comment la solution, trouvée par d'autres moyennes. Pourrait être écrite comme une dérivée fractionnelle.

Lutzen a résumé ce qu'Abel a fait. mais Liouville a résolu l'équation intégrale en 1832.

Entre (1832 – 1837), Liouville est le premier à étudier de manière approfondie le calcul fractionnaire, pour donner une définition logique de dérivée fractionnaire, il a publié ses articles entre 1832 et 1837. Partant de

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}, \quad (1.25)$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ ; il a proposé de définir la dérivée d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}$  de  $e^{ax}$ .

Par conséquent toute fonction  $f$  pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \quad (1.26)$$

admet une dérivée d'ordre  $\alpha > 0$  donnée par :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}. \quad (1.27)$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.26), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du.$$

En utilisant (1.25), il trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} &= \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du. \\ \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} &= \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

**Remarque 1.3** Bien que (1.22) et (1.28), sont différents pour les exposants  $\beta$ , la limite  $\beta = 0$  est problématique.

**Exemple 1.1** Par exemple, pour  $\alpha = \frac{1}{2}$

- la définition d'Euler donne :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

- alors que celle de Liouville donne :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = 0.$$

Ce paradoxe est en fait résolu, si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires. On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville, et celle de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 0$  :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Euler} x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy. \\ \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Liouville} x^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy.\end{aligned}$$

**Remarque 1.4** La différence entre ces définitions est les bornes de leurs intégrales.

En 1847, à partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy + \psi(x)$$

où  $\psi(x)$  est une "fonction complémentaire" qui fait obstacle dans ses travaux ultérieurs.

Elle sera éventuellement abandonnée, pour obtenir la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

Entre (1867 – 1868), Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie entre  $f(x + h)$  et  $f(x)$  divisée par  $h$ .

En 1869, la formule définitive de ce qu'on appelle maintenant intégrale fractionnaire de Riemann apparaît pour la première fois dans le travail Sonin. Pour une fonction complexe, dérivant  $n$  fois la formule de Cauchy ( $n \in \mathbb{N}$ ), on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}} dz.$$

Sonin généralise cette formule à  $n < 0$  et il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre  $\alpha > 0$ , notée par  ${}_a I_x^\alpha$  :

$${}_a I_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

En 1892, Heaviside offre cette année la première application concrète du calcul fractionnaire pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t).$$

L'approche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais donne la bonne solution, il constate que :

$$T(x, t) = T_0 \exp\left(-axp^{\frac{1}{2}}\right).$$

Il assume que  $p^{\frac{1}{2}} T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{\pi t}}$  ce qui correspond à la dérivée d'ordre  $\frac{1}{2}$  de  $T_0$  : Il obtient finalement la solution exacte, en développant la solution en série entière.

En 1917, Weyl introduit une définition de l'intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

En 1927, Marchaud construit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$D_+^\alpha f(x) = c \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{\alpha+1}} dt,$$

où  $\alpha > 0$ ;  $l \in \mathbb{N}$  avec  $l > \alpha$  et  $c$  est une constante de renormalisation. L'opérateur  $\Delta_t^l$  est une différence finie d'ordre  $l$  :

En 1928, Hardy et Littlewood affirment dans leur principale théorème que pour  $0 < \alpha < 1$  et  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ ,  ${}_a I_x^\alpha$  est un opérateur borné de  $L^p$  dans  $L^q$ ; où  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p - \alpha}$ .

En 1937, Riesz donne une définition de l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables :

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x - y\|^{n-\alpha}} dy.$$

Cet opérateur vérifie  $I^\alpha \circ I^\beta + I^{\alpha+\beta}$  et  $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$ ; où est l'opérateur Laplacien.

En 1970, Oldham et Spanier étudient le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée  $\frac{1}{2}$  du paramètre physique lors d'un phénomène de diffusion.

En 1974, Ross organise dans cette année la première conférence sur le calcul fractionnaire à l'Université de New Haven.

Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché une grande réussite de la théorie, ce qui n'est certainement pas unifiée; En outre, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche intéressants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions différentes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Durant ces trois dernières décennies, plus grand d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire ainsi une diversification importante a été paru dans les domaines d'application.

## 1.3 Fonctions spéciales

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions Gamma d'Euler, Bêta, Mittag-Leffler et Wright.

### 1.3.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une util très important dans le calcul fractionnaire.

**Définition 1.3** La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes, il faut que la partie entière n'appartener pas à  $\mathbb{Z}$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(z) > 0$ , on définit la fonction Gamma par :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.29)$$

**Exemple 1.2** On calcule  $\Gamma(1)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= [-e^{-t}]_0^{+\infty} \\ &= 1.\end{aligned}$$

**Exemple 1.3** On veut calculer  $\Gamma(\frac{1}{2})$  on trouve

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt.$$

On fait le changement de variable suivant  $\tau = t^{\frac{1}{2}}$ , alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= 2 \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{-\tau^2} d\tau \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau \\ &= 2 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

**Exemple 1.4**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ .

**Remarque 1.5**  $\Gamma(z)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ .

**Propriété 1.1** Soit  $\Gamma$  une fonction Gamma d'Euler.

1.  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , tel que  $(\operatorname{Re}(z) > 0)$ .
2. Ainsi la fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car :  $\Gamma(n+1) = n!$  tel que  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$ ,  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

**Preuve.** On veut montrer les propriétés précédentes :

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , intégrant par partie.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\
 &= \left[ -t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt \\
 &= z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
 &= z \Gamma(z).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2. Nous allons

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= 1 \\
 \Gamma(2) &= 2\Gamma(1) = 2.1! = 2! \\
 \Gamma(3) &= 3\Gamma(2) = 3.2! = 3! \\
 \dots &= \dots
 \end{aligned}$$

alors

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!$$

3. Considérons la fonction

$$f(n, z) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx \\
&= \int_0^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx \\
&= \int_0^n e^{-x} x^{z-1} dx \\
&= \int_0^n x^{z-1} e^{-x} dx \\
&= \Gamma(z).
\end{aligned}$$

D'une autre part :

$$\begin{aligned}
f(n, z) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx \\
&= \left[ \frac{x^z}{z} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right]_0^n + \frac{1}{z} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^z dx \\
&= \frac{1}{z} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^z dx.
\end{aligned}$$

En intégrant par partie encore une fois

$$\begin{aligned}
f(n, z) &= \frac{1}{z} \left[ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \frac{x^{z+1}}{z+1} \right]_0^n + \frac{n-1}{nz(z+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{z+1} dx \\
&= \frac{(n-1)}{nz(z+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{z+1} dx.
\end{aligned}$$

On encore après intégration  $n$  fois :

$$\begin{aligned}
f(n, z) &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{n^n z(z+1) \dots (z+(n-1))} \times \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{z+(n-1)} dx \\
&= \frac{n!}{n^n z(z+1) \dots (z+n-1)} \left[ \frac{x^{z+n}}{z+n} \right]_0^n \\
&= \frac{n! n^{z+n}}{n^n z(z+1) \dots (z+n)} \\
&= \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} = \Gamma(z).$$

■

### 1.3.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire, la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

**Définition 1.4** La fonction Bêta est définie par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0). \quad (1.30)$$

**Proposition 1.1** Soit  $z, w \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0$ , alors :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (1.31)$$

**Preuve.** Soit  $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \left( \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right) \left( \int_0^{+\infty} s^{w-1} e^{-s} ds \right) \\
&= \iint_D t^{z-1} s^{w-1} e^{-(t+s)} dt ds.
\end{aligned}$$

En utilisant un changement des coordonnées, considérons les nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} u = t + s \\ v = \frac{t}{t+s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = uv \\ s = u(1-v) \end{cases},$$



en utilise méthode de jacobienne

$$\frac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u,$$

le domaine  $D$  correspondant à  $D$  dans les cordonnées  $u, v$  est  $D = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$ ,  
alors :

$$\begin{aligned} \iint_D t^{z-1} s^{w-1} e^{-(t+s)} dt ds &= \iint_D (uv)^{z-1} (u(1-v))^{w-1} e^{-u} |-u| du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 u^z v^{z-1} u^{w-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} dv \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 u^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} dv \right) du \\ &= \left( \int_0^{+\infty} u^{z+w-1} v^{z-1} e^{-u} du \right) \left( \int_0^1 v^{z-1} (1-v)^{w-1} dv \right) \\ &= \Gamma(z+w) \beta(z, w). \end{aligned}$$

Donc :

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

■

### 1.3.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un role très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, et on la trouve largement utilisée dans les solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

**Définition 1.5** Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(z) > 0$ , on définit la fonction Mittag-Leffler comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.32)$$

où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma d'Euler donnée par (1.29).

### 1.3.4 La fonction de Wright

**Définition 1.6** La fonction de Wright est définie par :

$$\phi(\alpha, \beta; x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > -1. \quad (1.33)$$

**Proposition 1.2**

$$\mathcal{L}_t \left[ t^{\frac{\alpha}{2}-k} \phi \left( -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \right] = s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

## Chapitre 2

# Quelques approches de calcul fractionnaire

Ce chapitre sera consacré une définition élémentaire pour les intégrales, et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, et quelques propriétés de ses notions. Aussi, on donne quelques approches concernés au calcul fractionnaire.

### 2.1 Intégrale fractionnaires de Riemann-Liouville

Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville. On peut commencer par examiner une formule qui donne des primitives successives d'une fonction continue.

Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $b$  pouvant être fini ou infini. Une primitive de  $f$  est donnée par :

$$(I_{a+}^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.1)$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$\begin{aligned} (I_{a+}^2 f)(x) &= I_{a+}^1 f \circ I_{a+}^1 f \\ &= \int_a^x \left( \int_a^s f(t) dt \right) ds. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on peut transformer cet intégral double en intégrale simple :

$$(I_{a+}^2 f)(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt \quad (2.2)$$

Puis, on calcule les intégrales répétées n-fois, on trouve :

$$\begin{aligned} (I_{a+}^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t) dt_n \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt. \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

On peut généraliser cette expression de la manière suivante :

**Définition 2.1** [11] Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n = [\alpha] + 1$ , et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\text{Re}(\alpha) > 0$ ), notée  $I_{a+}^\alpha f$ , est définie par :

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (x > a), \quad (2.3)$$

où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma d'Euler donnée par (1.29).

De même manière, on définit aussi l'intégrale de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha > 0$  par :

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (x < b).$$

**Exemples 2.1** Considérons la fonction  $f(x) = (x-a)^\beta$ . Alors :

$$I_{a+}^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt$$

Pour évaluer cette intégrale, on fait le changement  $t = a + (x-a)\tau$ , d'où :

$$I_{a+}^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau$$

On utilise la fonction Bêta d'Euler, on trouve :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta} &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour le cas  $\alpha = 1$ , on a :

$$I_{a+}^1 (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1) \Gamma(\beta+1)} (x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (x-a)^{\beta+1}.$$

**Proposition 2.1** [3] *Soit  $f \in C^m([a, b])$ . Pour  $x$  fixé, l'application  $\alpha \rightarrow (I_{a+}^{\alpha} f)(x)$ , définie pour  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  est holomorphe, et se prolonge analytiquement au domaine  $\operatorname{Re}(\alpha) > -n$ .*

**Preuve.** L'application  $\alpha \rightarrow (I_{a+}^{\alpha} f)(x)$  est bien définie, et holomorphe pour  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ . Montrons l'existence du prolongement analytique. Dans (2.3) procédant on fait une intégration par partie :

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) d \left[ \frac{-(x-t)^{\alpha}}{\alpha} \right] dt \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t) dt \end{aligned}$$

Donc :

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + (I_{a+}^{\alpha+1} f')(t) dt \quad (2.5)$$

Le membre de droite de l'égalité précédente est holomorphe dans le domaine  $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$ .

A présent, le resultat final découle d'une simple itération de la formule précédente :

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + (I_{a+}^{\alpha+n} f^{(n)})(t) \quad (2.6)$$

formule qui constitue l'expression du prolongement analytique. ■

**Proposition 2.2** [3][11] *Soit  $f \in C^0([a, b])$ .*

1. Pour  $\alpha, \beta$  complexes tels que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , et  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ , on a :

$$I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}f) = (I_{a+}^{\alpha+\beta}f),$$

et,

$$I_{b-}^{\alpha}(I_{b-}^{\beta}f) = (I_{b-}^{\alpha+\beta}f).$$

2. Pour  $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$ , on a :

$$\frac{d}{dx}I_{a+}^{\alpha}f = I_{a+}^{\alpha-1}f.$$

**Preuve.**

1. On va montrer par un calcul direct que :

$$I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta}f)(x).$$

On a :

$$\begin{aligned} \left[ I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}f) \right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left( I_{a+}^{\beta}f \right)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[ \int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt. \end{aligned}$$

Faisant le changement de variable  $s = t + (x-t)\tau$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f ds &= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Le terme  $\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} \tau^{\beta-1} d\tau$  est la fonction Bêta d'Euler, alors :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\beta}f) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f. \end{aligned}$$

2. On montre maintenant la deuxième égalité, par la dérivation classique d'une intégrale, et l'utilisation de la relation  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ , obtient :

$$\frac{d}{dx} (I_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

puisque  $f(t)$  et  $(x-t)^{\alpha-1}$  sont continues donc l'application :

$$t \rightarrow (x-t)^{\alpha-1} f(t),$$

est continue, et on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (I_{a+}^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)-1} f(t) dt \\ &= (I_{a+}^{\alpha-1}f)(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

■

## 2.2 Dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

Le résultat précédent, permet nous d'enoncer une dérivée fractionnelle, au sens de Riemann-Liouville.

Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $b$  pouvant etre fini ou infini.

**Définition 2.2** [11] Soit  $\alpha \in ]m - 1, m[$  avec  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On appelle dérivée d'ordre  $\alpha$ , au sens de Riemann-Liouville à gauche, la fonction définie par :

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [(I_{a+}^{m-\alpha} f)(x)], \quad (2.7)$$

et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$({}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^m [(I_{b-}^{m-\alpha} f)(x)]. \quad (2.8)$$

**Exemple 2.2** Reprenons l'exemple de la fonction précédent  $f(x) = (x - a)^{\beta}$ . On aura :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\beta} &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[ (I_{a+}^{m-\alpha} (x - a)^{\beta})(x) \right] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (x - a)^{\beta + m - \alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} \frac{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous avons utilisé la formule :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x - a)^{\lambda} &= \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - m + 1) (x - a)^{\lambda - m} = \frac{\lambda!}{(\lambda - m)!} (x - a)^{\lambda - m} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 - m)} (x - a)^{\lambda - m} & \text{si } \lambda \notin \{0, \dots, m - 1\}, \\ 0 & \text{si } \lambda \in \{0, \dots, m - 1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = 1$ , la formule de dérivation (2.9) donne :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^1 (x - a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (x - a)^{\beta - 1} \\ &= \beta (x - a)^{\beta - 1} \\ &= \frac{d}{dx} (x - a)^{\beta}. \end{aligned}$$



Dans l'exemple précédent, si on prend  $\beta = 0$ , on obtient le résultat "bizard" suivant :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

**Lemme 2.1** [9][11] Soit  $\alpha \in ]m-1, m[$ , et  $f$  une fonction vérifiant  ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f = 0$ . Alors :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}$$

où les  $c_j$  sont des constantes quelconques.

**Preuve.** Partons de  ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [(I_{a+}^{m-\alpha} f)(x)] = 0$ , alors on a d'abord :

$$[I_{a+}^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j,$$

et par l'application de  $I_{a+}^{\alpha}$ , on obtient :

$$[I_{a+}^m f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{j+\alpha}$$

ensuite, par dérivation (classique), on obtient le résultat. ■

Maintenant, on va prolonger la définition vers  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.3** [11] La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(\alpha) \geq 0$  et  $n = [\text{Re}(\alpha) + 1]$  est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n [(I^{n-\alpha} f)(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (x > a), \end{aligned} \quad (2.10)$$

et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite définie par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f(x) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n [(I^{n-\alpha} f)(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dx, \quad (x < b). \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Remarques 2.1** [11] En particulier

1. Pour  $\alpha = 0$ , on a :

$$\left({}^{RL}D_{a+}^0 f\right)(x) = \left({}^{RL}D_{b-}^0 f\right)(x) = f(x).$$

2. Pour  $\alpha = n$ , on a :

$$\left({}^{RL}D_{a+}^n f\right)(x) = f^{(n)}(x),$$

et,

$$\left({}^{RL}D_{b-}^\alpha f\right)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) \quad n \in \mathbb{N}$$

tel que  $f^{(n)}(x)$  est dérivée  $n^{ème}$  de  $f$ .

**Propriété 2.1** Soit  $p > 0$ , et  $t > \alpha$ , on a :

$${}^{RL}D_{a+}^\alpha \left({}^{RL}D_{a+}^{-\alpha} f(x)\right) = f(x),$$

et :

$${}^{RL}D_{b-}^\alpha \left({}^{RL}D_{b-}^{-\alpha} f(x)\right) = f(x).$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^\alpha \left({}^{RL}D_{a+}^{-\alpha} f(x)\right) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \\ &= f(x). \end{aligned}$$

De meme méthode pour la deuxième. ■

**Propriété 2.2** [11] Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $D^m$  l'opération de dérivation  $n^{ème}$ .

– Si la dérivée fractionnaire  $(D_{a+}^\alpha f)(x)$  et  $(D_{a+}^{\alpha+m} f)(x)$  existe, alors :

$$(D^m D_{a+}^\alpha f)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} f)(x).$$

– Si la dérivée fractionnaire  $(D_{b-}^\alpha f)(x)$  et  $(D_{b-}^{\alpha+m} f)(x)$  existe, alors :

$$(D^m D_{b-}^\alpha f)(t) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} f)(t).$$

**Lemme 2.2** [12] Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > \alpha$ . L'opérateur  ${}^{RL}D_{a+}^\alpha f$ , définie par :

$${}^{RL}D_{a+}^\alpha = D^n I^{n-\alpha} f.$$

**Preuve.** L'hypothèse sur  $n$  implique que  $n \geq [\alpha]$ , ainsi

$$\begin{aligned} D^n I^{n-\alpha} f &= D^{[\alpha]} D^{n-[\alpha]} I^{n-[\alpha]} I^{[\alpha]-\alpha} f. \\ &= D^{[\alpha]} I^{[\alpha]-\alpha} \\ &= D_a^\alpha \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.3** [11] Si  $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$ , pour  $f(t)$  une fonction continue, alors :

$$\left( D_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f \right)(t) = I_{a+}^{\alpha-\beta} f(t), \quad \text{et} \quad \left( D_{b-}^\beta I_{b-}^\alpha f \right)(t) = I_{b-}^{\alpha-\beta} f(t).$$

En particulier, Si  $\beta = k \in \mathbb{N}$  et  $\operatorname{Re}(\alpha) > k$ , alors :

$$\left( D_{a+}^k I_{a+}^\alpha f \right)(t) = I_{a+}^{\alpha-k} f(t), \quad \text{et} \quad \left( D_{b-}^k I_{b-}^\alpha f \right)(t) = (-1)^k I_{b-}^{\alpha-k} f(t).$$

**Proposition 2.4** [3] L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville  ${}^{RL}D_a^\alpha$  possède la propriété suivant :

$$\left[ \left( I_a^\alpha \circ {}^{RL}D_a^\alpha \right) f \right](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim_{x \rightarrow a^+} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^j I_a^{m-\alpha} f \right](x) \right\}.$$

**Théorème 2.1** [4] Soit  $n > 0$ . Alors, pour chaque  $f \in L^1[a, b]$  :

$$I_{a+}^n D_{a+}^n f = f.$$

presque partout.

**Preuve.** (voir [4], la page 30) ■

## 2.3 Approche de Grünwald-Letnikov

Cette approche est une généralisation de la définition classique de la dérivation entière [8] [9].

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pour  $h > 0$  :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(t) - f(t-h)].$$

La dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f'(t) - f'(t-h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)]. \end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée n<sup>ème</sup> de  $f$  et donnée par :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh),$$

où :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!},$$

est la notation habituelle des coefficients du binôme.

**Définition 2.4** Soit  $\alpha > 0$  La dérivée de Grünwald-letnikov à gauche d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ({}^{GL}D_+^\alpha f)(t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh).$$

on obtient la dérivée de Grünwald-Letnikov à droite.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ({}^{GL}D_-^\alpha f)(t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + kh).$$

**Proposition 2.5** Si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , alors :

$$({}^{GL}D_+^\alpha {}^{GL}D_+^\beta f)(x) = ({}^{GL}D_+^{\alpha+\beta} f)(x).$$

**Théorème 2.2** Soit  $\alpha \geq 0$ ,  $n = [\alpha]$  et  $f \in C^n[a, b]$ , alors :

$${}^{GL}D_+^\alpha f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(t) dt.$$

## 2.4 Approche de Caputo

**Définition 2.5** [11] Soit  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ , et soit  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ , si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ;  $n = \alpha$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

La dérivée fractionnaire de Caputo à droite, d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$ , pour une fonction  $f$  est définie par :

$$({}^CD_{a+}^\alpha f)(x) = (I_{a+}^{m-\alpha} D^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche, d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$ , pour une fonction  $f$  est définie par :

$$({}^CD_{a+}^\alpha f)(x) = (-1)^n (I_{b-}^{m-\alpha} D^m f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $D^m$  l'opération de dérivation  $m^{\text{ème}}$ .

**Théorème 2.3** Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$ , avec  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ , alors :

$$({}^CD_{a+}^\alpha f)(t) = ({}^{RL}D_{a+}^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1),$$

et :

$$({}^CD_{b-}^\alpha f)(t) = ({}^{RL}D_{b-}^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (b-t)^{k-\alpha} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1),$$

c'est la relation entre les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo.

**Corollaire 2.1** [3] Si  $0 < \alpha < 1$ , et  $f$  de classe  $C^1$ , alors :

$$(I_a^\alpha \circ {}^{RL}D_a^\alpha) f = f \quad \text{et} \quad ({}^CD_a^\alpha \circ I_a^\alpha) f = f,$$

c'est -à-dire que les dérivation au sens de Riemann-Liouville, et de Caputo respectivement, constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville.

**Corollaire 2.2** [3] Si  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$  avec  $\alpha + \beta \leq 1$  et  $f$  de classe  $C^1$ , alors :

$$\left( {}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta \right) f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f = \left( {}^C D_a^\beta \circ {}^C D_a^\alpha \right) f.$$

**Preuve.** (voir, [3]) ■

**Remarque 2.2** La dérivée au sens de Caputo d'une constante est nulle :

$${}^C D_a^\alpha c = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

**Théorème 2.4** [1][11] Si  $f$  est une fonction continue, si  $\alpha > 0$  avec  $(n-1 < \alpha < n)$ , alors :

$${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t).$$

C'est-à-dire la dérivée fractionnaire de Caputo est l'inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

**Théorème 2.5** [1][11] Si  $f$  est une fonction continue si  $\alpha > 0$  avec  $(n-1 < \alpha \leq n)$ , alors :

$$I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k; \quad \forall t \in [a, b].$$

C'est-à-dire la dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

**Corollaire 2.3** [11] Soient  $\alpha \geq 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$  et  $({}^{RL} D_{a+}^\alpha f)(t)$ ,  $({}^C D_{a+}^\alpha f)(t)$  sont existents, supposons que  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Alors :

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = ({}^{RL} D_{a+}^\alpha f)(t).$$

**Théorème 2.6** [11] Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = ({}^C D_{b-}^\alpha f)(t) = f(t).$$

**Preuve.** (voir, [11]) ■

## 2.5 Approche de Hadamard

Dans ce section, nous présentons les définitions et quelques propriétés de l'intégrale, et la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard [11].

**Définition 2.6** Soit  $\alpha > 0$ . L'intégrale fractionnaire de Hadamard à gauche (resp. à droite) d'ordre  $\alpha$  de  $f$  est définie par :

$$(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left( \log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau,$$

et,

$$(\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left( \log \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

**Proposition 2.6** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$  et  $1 \leq p \leq \infty$ . si  $0 < a < b < +\infty$ , et  $f \in L^p(a, b)$ . Alors :

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^{\beta} f = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f, \quad (c \leq 0),$$

et :

$$\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha} \mathfrak{I}_{b-}^{\beta} f = \mathfrak{I}_{b-}^{\alpha+\beta} f, \quad (c \geq 0).$$

**Définition 2.7** Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$  et  $\delta = tD \left( D = \frac{d}{dt} \right)$ . Les dérivées fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre  $\alpha$  de  $f$  sont définies par :

$$({}^H D_{a+}^{\alpha} f)(t) = \delta^n (\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f)(t) = \left( t \frac{d}{dt} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left( \log \frac{t}{\tau} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t > a),$$

et :

$$({}^H D_{b-}^{\alpha} f)(t) = (-\delta)^n (\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha} f)(t) = \left( -t \frac{d}{dt} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left( \log \frac{\tau}{t} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t < b),$$

respectivement.

**Proposition 2.7** Soit  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , et  $1 \leq p \leq \infty$ , alors, pour  $f \in L^p(a, b)$  :

$${}^H D_{a+}^{\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f = f \quad (c \leq 0),$$

et :

$${}^H D_{b-}^{\alpha} \mathfrak{I}_{b-}^{\alpha} f = f \quad (c \geq 0).$$

**Proposition 2.8** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$ . Soit  $f \in L^p(a, b)$  avec  $(1 \leq p \leq \infty)$  :

$${}^H D_{a+}^\beta \mathfrak{S}_{a+}^\alpha f = \mathfrak{S}_{a+}^{\alpha-\beta} f \quad \text{et} \quad {}^H D_{b-}^\beta \mathfrak{S}_{b-}^\alpha f = \mathfrak{S}_{b-}^{\alpha-\beta} f.$$

## 2.6 Approche de Weyl

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , telles que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \exists c \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left| x^\alpha \partial_x^\beta f(x) \right| \leq c,$$

c'est-à-dire  $f$  fonction de Schwartz, noté  $f$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 2.8** [3] Soit  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ . La transformation de Weyl est définie par :

$$(W^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

**Proposition 2.9** [3] La transformation de Weyl vérifie :

$$W^\alpha \circ W^\beta = W^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad \left( \frac{d}{dx} \right) \circ W^\alpha = -W^{\alpha-1} = W^\alpha \circ \left( \frac{d}{dx} \right).$$

**Preuve.** Voir([3], la page 14). ■

**Définition 2.9** [3] La dérivée fractionnaire au sens de Weyl est définie par :

$$({}^W D^\alpha f)(x) = \left( \frac{-d}{dx} \right)^m [W^{m-\alpha} f](x),$$

où  $\alpha \in ]m-1, m[$  et  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .



## Chapitre 3

# Quelques applications

### 3.1 Exemple des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Nous allons travailler avec la dérivée au sens de Riemann-Liouville, avec  $a = 0$ , et  $0 < \alpha < 1$ , pour plus de commodité.

Considérons le problème de cauchy suivant :

$$\begin{cases} (D^\alpha u)(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } ]0, b] \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-\alpha} u(x) = u_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

**Définition 3.1**  $(c_\alpha([0, b]), \|\cdot\|_\alpha)$  est un espace de Banach, où  $c_\alpha([0, b])$  est définie par :

$$c_\alpha([0, b]) = \left\{ f : ]0, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue et } \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-\alpha} f(x) \text{ existe} \right\},$$

et :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{[0, b]} |x^{1-\alpha} f(x)|.$$

#### 3.1.1 Réduction du problème de type Cauchy et du Volterra équation intégrale

Notre point de départ la proposition (2.4)

$$[(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0+} ({}^{RL}I_a^{1-\alpha} f)(x) \right\}.$$

La valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0+} (I^{1-\alpha} f)(x)$  tient lieu de valeur initiale et nous avons vu plus haut

que cette valeur est nulle si  $f$  est continue sur un intervalle  $[0, b]$ . De là l'espace des fonctions dans lequel nous allons considérer les équations différentielles sera un espace où cette limite est finie sans être forcément nulle.

On va comencer par le lemme suivant :

**Lemme 3.1** [9][11] Si  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-\alpha} f(x) = c$  et  $f$  continue sur  $]0, b]$ ,  $b \in \mathbb{R}$  alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (I^{1-\alpha} f)(x) = c\Gamma(\alpha).$$

**Preuve.** : D'après l'expression de l'intégrale de Riemann-Liouville :

$$\begin{aligned} (I^{1-\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} f(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la relation (2.4), on a :  $\Gamma(\alpha) = \left( I^{1-\alpha} (t)^{\alpha-1} dt \right)$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-\alpha} f(x)$  existe, la fonction  $x^{1-\alpha} f(x)$  est prolongeable par continuité à  $[0, b]$ . D'où :

$$\begin{aligned} (I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} f(t) dt - c\Gamma(\alpha) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} [t^{1-\alpha} f(t) - c] dt \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |(I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha)| &\leq \frac{\sup_{[0,x]} |t^{1-\alpha} f(t) - c|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} dt \\ &\leq \Gamma(\alpha) \sup_{[0,x]} |t^{1-\alpha} f(t) - c|. \end{aligned}$$

D'où le resultat. ■

**Théorème 3.1** Si  $u \in \mathbb{C}([0, T])$ , alors  $u$  satisfait 3.1 si et seulement si  $u$  satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = x^{\alpha-1}u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt.$$

**Preuve.** L'objet de travail est de transformer formellement le problème (3.1) en une équation intégrale :

$$\begin{aligned} I^\alpha [(D^\alpha u)](x) &= I^\alpha [f(., u(.))](x) \\ u(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x \rightarrow 0+} (I^{1-\alpha} u)(x) &= I^\alpha [f(., u(.))](x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u(x) = x^{\alpha-1}u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt. \quad (3.2)$$

Pour plus de détaille voir [10] ■

### 3.1.2 Existence et unicité de la solution du problème de type Cauchy

On va écrire le second membre de (3.2), comme l'action d'un opérateur  $Tu$ , et montrer que sous certaines hypothèses, il est contractant dans  $C_\alpha([0, b])$ , pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Banach [3]

Posons pour  $u \in C_\alpha([0, b])$

$$(Tu)(x) = x^{\alpha-1}u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt. \quad (3.3)$$

Il faut montrer d'abord, que l'opérateur  $T$  envoie bien les éléments de  $C_\alpha([0, b])$  sur des éléments de même espace, ensuite qu'il est contractant (sous des hypothèse). Mettons sur  $f$  des hypothèses, comme dans le cas classique, mais modulo l'espace  $C_\alpha([0, b])$ .

Nous supposons que :

1.  $f(x, y)$  est définie dans  $]0, b] \times ]u_0 - \delta, u_0 + \delta[$  ( $\delta > 0$ ).
2. Pour tout  $y$ , l'application  $f(., y)$  est dans  $C_\alpha([0, b])$ .
3.  $f$  est uniformément lipschitzienne, par rapport à  $y$ , i.e, il existe  $\omega > 0$  telle que :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \omega |y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in ]u_0 - \delta, u_0 + \delta[.$$

Voyons d'abord si pour  $u \in C_\alpha([0, b])$ , on aura  $Tu \in C_\alpha([0, b])$ . Pour la condition de limite en  $0^+$  on a :

$$\begin{aligned}
|x^{1-\alpha}(Tu)(x) - u_0| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, u(t))| dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [|f(t, u(t)) - f(t, u_0)| + |f(t, u_0)|] dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [\omega |u(t) - u_0| + |f(t, u_0)|] dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [\omega |u(t)| + \omega |u_0| + |f(t, u_0)|] dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \omega |u_0| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt + \\
&\quad \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} [\omega t^{1-\alpha} |u(t)| + t^{1-\alpha} |f(t, u_0)|] dt
\end{aligned}$$

D'après le fait que  $u \in C_\alpha([0, b])$ , et la deuxième hypothèse sur  $f$ , on peut dire que :

$$\sup_{[0, b]} [\omega t^{1-\alpha} |u(t)| + t^{1-\alpha} |f(t, u_0)|] = A$$

existe, d'où :

$$|x^{1-\alpha}(Tu)(x) - u_0| \leq \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} \omega |u_0| + \frac{A\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} x^\alpha,$$

c'est-à-dire que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha}(Tu)(x) = u_0$  et donc  $Tu \in C_\alpha([0, b])$ .

Pour la contraction, on a :

$$x^{1-\alpha}[(Tu)(x) - (Tv)(x)] = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] dt,$$

et donc :

$$\begin{aligned}
x^{1-\alpha} [(Tu)(x) - (Tv)(x)] &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt \\
&\leq \frac{\omega}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |u(t) - v(t)| dt \\
&\leq \frac{\omega}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} |u(t) - v(t)| dt \\
&\leq \frac{\omega \|u - v\|_\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{\omega \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} x^\alpha \|u(t) - v(t)\|_\alpha
\end{aligned}$$

Nous allons faire les estimations dans l'espace  $C_\alpha([0, b])$ , avec  $0 < b_1 \leq b$ , et choisir  $b_1$  de façon que la constante de contraction, soit strictement inférieur à 1. Les calculs précédents donnent :

$$\|Tu - Tv\|_{\alpha, b_1} \leq \frac{\omega \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} b_1^\alpha \|u - v\|_{\alpha, b_1}$$

Il suffit de choisir  $b_1$  afin que la constante  $K = \frac{\omega \Gamma \alpha}{\Gamma(2\alpha)} b_1^\alpha$  soit strictement inférieur à 1 i.e,

$$b_1 < \min \left( b, \left( \frac{\Gamma(2\alpha)}{\omega \Gamma(\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right).$$

On arrive au théorème suivant :

**Théorème 3.2** [3][11] *Sous les hypothèses sur  $f$  données plus haut, il existe une solution unique au problème de Cauchy (3.1) dans l'espace  $C_\alpha([0, b])$  avec  $b_1 < \min \left( b, \left( \frac{\Gamma(2\alpha)}{\omega \Gamma(\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$ .*

### 3.1.3 Méthode de Laplace

La méthode de Laplace, comme dans le cas classique, consiste à transformer le problème différentiel en un problème de résolution d'une équation algébrique. Elle n'est réellement efficace que dans le cas des équations linéaires, à coefficients constants.[3][11]

D'abord, on va voir comment transformer les dérivées et intégrales fractionnaires. On

a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I^\alpha f](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zx} (I^\alpha f)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_0^x e^{-zx} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left( \int_t^{+\infty} e^{-zx} (x-t)^{\alpha-1} dx \right) f(t) dt
\end{aligned}$$

En posant  $x = t + y$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I^\alpha f](z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left( \int_t^{+\infty} e^{-zy} y^{\alpha-1} dy \right) f(t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-zt} z^{-\alpha} f(t) dt \\
&= z^{-\alpha} \mathcal{L}[f](z).
\end{aligned}$$

Maintenant, si  $m-1 < \alpha < m$ , alors la dérivée de Riemann-Liouville est donnée par :

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^m [(I^{m-\alpha} f)(x)],$$

et de là :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D^\alpha f](z) &= z^m \mathcal{L}[I^{m-\alpha} f](z) - \sum_{j=0}^{m-1} z^{m-1-j} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^j (I^{m-\alpha} f) \right] (0^+) \\
&= z^\alpha \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{m-1} z^{m-1-j} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^j (I^{m-\alpha} f) \right] (0^+).
\end{aligned}$$

**Proposition 3.1** *On a les formules récapitulatives suivantes :*

$$\mathcal{L}[I^\alpha f](z) = z^{-\alpha} \mathcal{L}[f](z) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (3.4)$$

Supposons  $m - 1 < \alpha < m$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^\alpha f](z) &= z^\alpha \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{m-1} z^{m-1-j} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^j (I^{m-\alpha} f) \right] (0^+) \\ &= z^\alpha \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{m-1} z^{m-1-j} [D^{\alpha+j-m} f] (0^+).\end{aligned}\quad (3.5)$$

**Exemples 3.1** Résolvons le problème de cauchy (3.1), tel que  $f(x, u(x)) = \lambda u(x)$  ; donne le problème suivant :

$$\begin{cases} (D^\alpha u)(x) = \lambda u(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} u(x) = b \end{cases}, \quad (3.6)$$

où  $0 < \alpha < 1$ . Par la transformation de Laplace, on obtient :

$$z^\alpha U(z) = \lambda U(z) + b\Gamma(\alpha),$$

où on a posé  $U(z) = \mathcal{L}[u](z)$ , et on a utilisé le lemme (3.1). Alors :

$$\begin{aligned}U(z) &= \frac{b\Gamma(\alpha)}{z^\alpha - \lambda} = \frac{b\Gamma(\alpha)}{z^\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{z^\alpha}} \\ &= b\Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{z^{k\alpha + \alpha}},\end{aligned}$$

et donc :

$$u(x) = b\Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^{k\alpha + \alpha - 1}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} = b\Gamma(\alpha) x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + \alpha)}.$$

### 3.1.4 Méthode des séries

La méthode des séries, comme celle de Laplace, est efficace uniquement pour les équations linéaires ; mais peut être utilisées pour des équations à coefficients non constants. Nous allons expliquer le procédé à travers un exemple. Trouvons une solution à l'équation [3][11]

$$(D^\alpha u)(x) = \lambda x^\beta u(x). \quad (3.7)$$

Dans la méthode classique des séries entières, la formule clé est  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$  c'est-à-dire que si on note  $f_n(x) = x^n$  alors l'opérateur de dérivation envoie  $f_n$  sur  $f_{n-1}$  à un facteur multiplicatif près (complètement connu). Le système  $\{f_n\}$  est libre, ce qui permet

d'identifier les coefficients des séries. Dans notre cas, la formule de départ sera (2.9)

$$D^\alpha x^s = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)} x^{s-\alpha}.$$

i.e, la régression se fait avec un pas de  $\alpha$ . Comme ceci n'est pas commode pour parler de séries, on se placera sur les multiples entiers de  $\alpha$  :

$$D^\alpha x^{n\alpha} = \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1-\alpha)} x^{(n-1)\alpha}.$$

Ce système de fonctions n'est pas encore au point, puisque d'une part on ne s'arrêtera pas à  $n = 0$  (comme dans la dérivation classique) car  $D^\alpha 1 \neq 0$ , et d'autre part le facteur  $x^\beta$  n'est pas pris en charge. Voici le bon système :

$$h_n(x) = x^{n(\alpha+\beta)+\alpha-1}.$$

On a :  $D^\alpha h_0 = 0$ , Aussi,

$$D^\alpha h_n = \frac{\Gamma(n(\alpha+\beta)+\alpha)}{\Gamma(n(\alpha+\beta))} x^\beta h_{n-1}. \quad (3.8)$$

Maintenant, on peut chercher une solution à (3.7) sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n h_n(x).$$

On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{\Gamma(n(\alpha+\beta)+\alpha)}{\Gamma(n(\alpha+\beta))} x^\beta h_{n-1}(x) = \lambda x^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} c_n h_n(x),$$

qui donne la récurrence :

$$c_n = \frac{\lambda \Gamma(n(\alpha+\beta))}{\Gamma(n(\alpha+\beta)+\alpha)} c_{n-1},$$

puis,

$$c_n = c_0 \lambda^n \prod_{K=1}^n \frac{\Gamma(K(\alpha+\beta))}{\Gamma(K(\alpha+\beta)+\alpha)}.$$

Ainsi une solution à (3.7) est donnée par :

$$u(x) = c_0 x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lambda x^{\alpha+\beta} \right)^n \prod_{K=1}^n \frac{\Gamma(K(\alpha+\beta))}{\Gamma(K(\alpha+\beta)+\alpha)}.$$



La convergence de cette série est simple à étudier  $\left(\frac{c_{n+1}}{c_n} \sim (n+1)^{-\alpha}\right)$ . L'unicité peut être réglée par une condition initiale, et le théorème d'existence et d'unicité.

### 3.1.5 Méthode opérationnelle

On va étudier cet exemple :

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (D^\alpha u)(x) = \lambda u(x) + g(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1-\alpha} u(x) = b \end{cases},$$

qu'on peut transformer par  $I^\alpha$  en :

$$u(x) = bx^{\alpha-1} + \lambda(I^\alpha u)(x) + (I^\alpha g)(x),$$

et qui peut s'écrire comme suit :

$$([id - \lambda I^\alpha] u)(x) = bx^{\alpha-1} + (I^\alpha g)(x).$$

Maintenant, il faut montrer que dans l'espace  $C_\alpha([0, b])$  l'opérateur  $I^\alpha$  est borné et que pour  $|\lambda|$  petit on a  $\|\lambda I^\alpha\| < 1$ . Ceci nous permet d'inverser  $[id - \lambda I^\alpha]$  par la série de Neumann :

$$[id - \lambda I^\alpha]^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda I^\alpha)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n I^{n\alpha}.$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} u(x) &= b \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n I^{n\alpha} x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left( I^{(n+1)\alpha} g \right)(x) \\ &= b \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} x^{n\alpha + \alpha - 1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} \int_0^x (x-t)^{n\alpha + \alpha - 1} g(t) dt, \end{aligned}$$

alors :

$$u(x) = b \Gamma(\alpha) x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda (x-t)^\alpha) g(t) dt,$$

où  $E_{\alpha, \alpha}$  est la fonction de Mittag-Leffler donnée par (1.32) [3][11].

### 3.2 Problèmes de type Cauchy pour une équation en deux dimensions

On considère l'équation aux dérivées partielles d'ordre  $0 < \alpha < 2$  :

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbb{R}; \quad t > 0; \quad \lambda > 0), \quad (3.9)$$

avec les conditions initiales de type Cauchy de la forme :

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,0+) = f_k(x), \quad (3.10)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1$  pour  $0 < \alpha \leq 1$ , et  $k = 2$  pour  $1 < \alpha < 2$ .

Pour  $n = 1$

pour résoudre ce problème, nous appliquons la transformée de Laplace par rapport à  $t$

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt \quad (x \in \mathbb{R}; \quad s > 0) \quad (3.11)$$

et la transformée de Fourier par rapport à  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(\mathcal{F}_x u)(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{ix\sigma} dx \quad (\sigma \in \mathbb{R}; \quad t > 0). \quad (3.12)$$

Appliquant la transformée de Laplace à (3.9) :

$$(\mathcal{L}_t D_{0+,t}^\alpha u)(x,s) = s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x,s) - \sum_{j=1}^l s^{j-1} (D_{0+,t}^{\alpha-j} u)(x,0+), \quad (3.13)$$

avec  $x \in \mathbb{R}$ ,  $l-1 < \alpha \leq l$  et  $l \in \mathbb{N}$ . si  $l = 1$  et  $l = 2$  dans les cas respectifs  $0 < \alpha \leq 1$  et  $1 < \alpha < 2$ , et les conditions initiales dans (3.10), nous avons :

$$s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x,s) = \sum_{k=1}^l s^{k-1} f_k(x) + \lambda^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}_t u \right)(x,s) \quad (l = 1, 2).$$

Appliquons la transformée de Fourier, et utilisons la formule avec  $k = 2$  :

$$\left( \mathcal{F}_x \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \right)(\sigma,t) = -|\sigma|^2 (\mathcal{F}_x u)(\sigma,t), \quad (3.14)$$

nous arrivons à la relation suivante :

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma, s) = \sum_{k=1}^l \frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 |\sigma|^2} (\mathcal{F}_x f_k)(\sigma) \quad \left( \sigma \in \mathbb{R}; \quad t > 0; \quad l = 1, 2 \right). \quad (3.15)$$

Maintenant, nous obtenons la solution explicite  $u(x, t)$ , par utilisation de la transformée de Fourier inverse par rapport à  $\sigma$  :

$$(\mathcal{F}_\sigma^{-1} u)(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\sigma, t) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad \left( \sigma \in \mathbb{R}; \quad t > 0 \right), \quad (3.16)$$

et la transformée inverse de laplace par rapport à  $s$  :

$$(\mathcal{L}_s^{-1} u)(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} u(x, s) ds \quad (x \in \mathbb{R}; \quad \gamma = \operatorname{Re}(s) > \sigma_\varphi). \quad (3.17)$$

A partir table accessible de la transformée de Fourier et Laplace, nous avons :

$$(\mathcal{F}_x e^{-c|x|})(\sigma) = \frac{2c}{c^2 + |\sigma|^2} \quad (c > 0; \quad \sigma \in \mathbb{R}), \quad (3.18)$$

$$\left( \mathcal{F}_x e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \right)(\sigma) = \frac{2\lambda s^{\frac{\alpha}{2}}}{s^\alpha + \lambda^2 |\sigma|^2}.$$

Donc, la relation (3.15) prend la forme :

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma, s) = \left( \mathcal{F}_x \left[ \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^l s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \right] \right)(\sigma) (\mathcal{F}_x f_k)(\sigma) \quad (l = 1, 2),$$

ou, conformément à la propriété de convolution :

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma, s) = \left( \mathcal{F}_x \left[ \sum_{k=1}^l \frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x) \right] \right)(\sigma) \quad (l = 1, 2),$$

D'ici, appliquons la transformée de fourier inverse, nous arrivons à la relation suivant :

$$(\mathcal{L}_t u)(x, s) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x) \quad (x \in \mathbb{R}; \quad s > 0; \quad l = 1, 2). \quad (3.19)$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse en (3.19), nous pouvons obtenir la solution explicite de la problème de type Cauchy (3.9)–(3.10). Les fonctions  $s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}}$  ( $k = 1, 2$ ) sont exprimées par l'intermédiaire de la transformée de Laplace de la fonction de Wright

de la forme  $\phi\left(-\frac{\alpha}{2}, b; -z\right)$ . Donc on arrive à la proposition (1.2) :

$$\left(\mathcal{L}_t \left[ t^{\frac{\alpha}{2}-k} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \right]\right) = s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (k = 1, 2). \quad (3.20)$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse en (3.19), on obtient le résultat dans le théorème suivant :

**Théorème 3.3** [11] *Si  $0 < \alpha < 2$  et  $\lambda > 0$ , puis le problème de type Cauchy (3.9) – (3.10) est soluble, et sa solution donnée par :*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^l \int_{-\infty}^{\infty} G_k^{\alpha}(x - \tau, t) f_k(\tau) d\tau \quad (l = 1 \text{ pour } 0 < \alpha \leq 1; l = 2 \text{ pour } 1 < \alpha < 2), \quad (3.21)$$

$$G_k^{\alpha}(x, t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-k} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (k = 1, 2), \quad (3.22)$$

à condition que les intégrales à droite de (3.21) sont convergents.

**Corollaire 3.1** [11] *Si  $0 < \alpha < 2$  et  $\lambda > 0$ , puis le problème de type Cauchy*

$$(D_{0+,t}^{\alpha} u)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (D_{0+,t}^{\alpha-1} u)(x, 0+) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0), \quad (3.23)$$

est résoluble, et sa solution a la forme :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{\alpha}(x - \tau, t) f(\tau) d\tau, \quad (3.24)$$

$$G_1^{\alpha}(x, t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (3.25)$$

à condition que l'intégrale dans le côté droit de (3.24) est convergent.

**Corollaire 3.2** [11] *Si  $0 < \alpha < 2$  et  $\lambda > 0$ , puis le problème de type Cauchy*

$$(D_{0+,t}^{\alpha} u)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0), \quad (3.26)$$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-1} u)(x, 0+) = f_1(x); \quad (D_{0+,t}^{\alpha-1} u)(x, 0+) = f_2(x); \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (3.27)$$

est résoluble, et sa solution a la forme :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{\alpha}(x - \tau, t) f_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} G_2^{\alpha}(x - \tau, t) f_2(\tau) d\tau, \quad (3.28)$$

où  $G_1^\alpha(x, t)$  est donnée par (3.25),  $G_2^\alpha(x, t)$  c'est donnée par :

$$G_2^\alpha(x, t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-2} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (3.29)$$

à condition que les intégrales dans le côté droit de (3.28) sont convergents.

**Exemple 3.2** le problème suivant de type Cauchy, avec  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\left(D_{0+,t}^{\frac{1}{2}}u\right)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad \left(I_{0+,t}^{\frac{1}{2}}u\right)(x, 0+) = f(x); \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0), \quad (3.30)$$

a sa solution donnée par :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{\frac{1}{2}}(x - \tau, t) f(\tau) d\tau, \quad (3.31)$$

où  $G_1^\alpha(x, t)$  est donnée par (3.25) avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**Exemple 3.3** le problème suivant de type Cauchy, avec  $\alpha = \frac{3}{2}$

$$\left(D_{0+,t}^{\frac{3}{2}}u\right)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad \left(I_{0+,t}^{\frac{1}{2}}u\right)(x, 0+) = f(x); \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0), \quad (3.32)$$

$$\left(D_{0+,t}^{\frac{1}{2}}u\right)(x, 0+) = f_1(x); \quad \left(I_{0+,t}^{\frac{1}{2}}u\right)(x, 0+) = f_2(x); \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (3.33)$$

a sa solution donnée par :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{\frac{3}{2}}(x - \tau, t) f_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} G_2^{\frac{3}{2}}(x - \tau, t) f_2(\tau) d\tau, \quad (3.34)$$

où  $G_1^\alpha(x, t)$   $G_2^\alpha(x, t)$  sont donnée par (3.25) et (3.29) avec  $\alpha = \frac{3}{2}$ .

**Exemple 3.4** le problème suivant de type Cauchy pour l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0), \quad (3.35)$$

et sa solution donnée par :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \tau, t) f(\tau) d\tau, \quad G(x, t) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t}}. \quad (3.36)$$

ce résultat bien connu découle du corollaire (3.1), si l'on prend en compte la relation suivante pour la fonction de Wright donner par (1.33),

$$\phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}. \quad (3.37)$$

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté quelques approches de calcul fractionnaires, surtout l'approche de Rimann-Liouville. On donne une vision sur l'application de ce vague théorème dans les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Ainsi, on aspire que ce travail est un ouvrage d'un recherche scientifique serieu.

# Bibliographie

- [1] **A. Bouaziz**, Sur la theorie des équation différentielles fractionnaires, thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, (2015) .
- [2] **P. L. Butzer, U. Westphal**. An introduction to fractional calculus, Univ Hannover, Germany.
- [3] **H. DIB**, Equation différentielles fractionnaire, Université Aboubekr Belakid, Tlemcen (2009).
- [4] **Kai. Diethelm**, The analysis of fractional differential equations, Germany (2004).
- [5] **P. Dolbeault**, Analyse complexe, l'Université de Pierre et Marie Curie, 1990.
- [6] **F. Dubois, A Galucio, N Point**, Introduction à la dérivation fractionnaire Théorie et applications.
- [7] **M. Hamdani Cherif, ,** Résolution numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles non linéaire et d'ordre fractionnaire par la méthode HPM, thèse de : Doctorat, Univercité de Ahmed Ben Bella, Oran (2016).
- [8] **K. Haouam**, Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires, Thèse de : Doctorat, Université de Constantine, (2007).
- [9] **T. Houmor**, Analyse du Chaos dans un Système d'équations Différentielles Fractionnaires, Univ Constantine1, (2014).
- [10] **M. Kaddouri**, Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, mémoire de Master, Université de Tahar Moulay, Saïda, 2017.
- [11] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J.J.Trujillo** *Theory and applications of fractional differential equation*, **North-Holland Mathematics Studies 204**, (2006).
- [12] **M. Wellbeer**, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, (2010).